Размерный анализ теории Хорндески

QUARKS-2026

Фатыхов Р. Р., Сушков С. В

Казанский Федеральный Университет (КФУ)

Петрозаводск, 20 мая 2026 г

Благодарим за обсуждения Бухбиндера И. Л.

Введение

Теорема Лавлока (Lovelock 1971)

В четырех измерениях ОТО является единственной метрической теорией гравитации с уравнениями второго порядка.

Возможное обобщение

Добавление новых степеней свободы в гравитационный сектор.

- Первый пример: теория Бранса-Дикке (Brans и Dicke 1961) (скалярное поле, неминимально связанное с кривизной).
- Теория Хорндески (Horndeski 1974): наиболее общая скалярно-тензорная теория *второго* порядка.

Теория Хорндески

Лагранжиан Хорндески

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= G_2(\phi, X), \\
\mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi, X)\Box\phi, \\
\mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\right], \\
\mathcal{L}_5 &= G_5 G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 + 2\phi^{\mu}{}_{\nu}\phi^{\nu}{}_{\alpha}\phi^{\alpha}{}_{\mu} - 3\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\Box\phi\right]
\end{aligned}$$

Проблема

В общем случае разложение $G_i(\phi, X) = \sum_{n,m} c^{(i)}_{nm}\phi^n X^m$ содержит *независимые размерные* параметры.

Известные подклассы теории Хорндески

- ΛCDM: $G_2 = -2\Lambda,\ G_3 = 0,\ G_4 = \frac{1}{2}M_{\mathrm{Pl}}^2,\ G_5 = 0$
- K-эссенция: $G_2 = K(\phi, X),\ G_3 = 0,\ G_4 = \frac{1}{2}M_{\mathrm{Pl}}^2,\ G_5 = 0$
- Кинетическое плетение:
  $G_2 = K(\phi, X),\ G_3 = G(\phi, X),\ G_4 = \frac{1}{2}M_{\mathrm{Pl}}^2,\ G_5 = 0$
- $f(\phi)$ теории: $G_2 = X - V(\phi),\ G_3 = 0,\ G_4 = f(\phi),\ G_5 = 0$
- Неминимальная кинетическая связь:
  $G_2 = X - V(\phi),\ G_3 = 0,\ G_4 = \frac{1}{2}M_{\mathrm{Pl}}^2,\ G_5 = \eta\phi/2$
- Ковариантный галилеон:
  $G_2 = c_1\phi + c_2 X,\ G_3 = -c_3 X,\ G_4 = \frac{1}{2}(M_{\mathrm{Pl}}^2 + c_4 X^2),\ G_5 = c_5 X^2$

Важно

Параметры c_i *размерны*, масштаб подбирается феноменологически, чтобы описывать современное ускоренное расширение ($M \sim H_0$).

Ограничивающие соображения

Принципиальные (эстетические)

- **минимизация количества независимых размерных параметров**
- естественность малых размерных параметров по т'Хоофту (Hooft 1980)

Структурные

- аналитичность в стационарном пределе ($X \to 0$)
- принцип соответствия (переход в ОТО)
- **масштабная инвариантность**

Физические

- согласованность с наблюдательными данными
- отсутствие неустойчивостей (духи, тахионы, градиентные)

Цель и подход

Цель

Исследовать ограничения на вид функций $G_i(\phi, X)$ основываясь на фундаментальных принципах:

1. требование **масштабной инвариантности** теории (минимизация числа независимых размерных параметров)
2. регулярное поведение **в стационарном пределе** ($X \to 0$)

Подход

1. Получить структурные ограничения на G_i из размерного анализа.
2. Потребовать регулярность уравнений при $X \to 0$.
3. Получить ограничения из выражения для c_T.

Размерный анализ

$\hbar = c = 1$, массовые единицы:

$$[\mathcal{L}] = 4, \quad [R] = 2, \quad [X] = 2[\phi] + 2$$

$$[G_2] = 4, \quad [G_3] = 2 - [\phi], \quad [G_4] = 2, \quad [G_5] = -[\phi]$$

Условие масштабной инвариантности

$$G_i(\mu^{\gamma}\phi, \mu^{2\gamma+2}X) = \mu^{n_i} G_i(\phi, X), \quad \gamma = [\phi],$$

$$\gamma\phi\frac{\partial G_i}{\partial\phi} + (2\gamma + 2)X\frac{\partial G_i}{\partial X} = n_i G_i, \quad n_i = [G_i],$$

Две возможности

- $[\phi] = 0$: геометрическая природа (Калуца-Клейн);
- $[\phi] = 1$: материальная природа.

Структура масштабно-инвариантных G_i

Случай $[\phi] = 0$
(безразмерное поле)

Случай $[\phi] = 1$
(поле размерности массы)
$u = X/\phi^4$

$$G_2 = X^2 g_2(\phi), \quad G_3 = X g_3(\phi)$$

$$G_4 = X g_4(\phi), \quad G_5 = g_5(\phi)$$

$$G_2 = \phi^4 g_2(u), \quad G_3 = \phi g_3(u)$$

$$G_4 = \phi^2 g_4(u), \quad G_5 = \phi^{-1} g_5(u)$$

Пример $[\phi] = 1$ (низшие члены разложения)

$$G_2 = X - \frac{\lambda\phi^4}{4}, \qquad G_4 = \xi\phi^2$$

Уравнения Фридмана (Kobayashi, Yamaguchi и Yokoyama 2011)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2, \qquad \phi = \phi(t)$$

$$\sum_{i=2}^{5} \mathcal{E}_i = 0, \qquad \sum_{i=2}^{5} \mathcal{P}_i = 0$$

$$\mathcal{E}_2 = 2XG_{2X} - G_2, \qquad \mathcal{P}_2 = G_2,$$

$$\mathcal{E}_3 = 6X\dot{\phi}HG_{3X} - 2XG_{3\phi}, \qquad \mathcal{P}_3 = -2X(G_{3\phi} + \ddot{\phi}G_{3X}),$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Регулярность при $X \to 0$ (стационарный предел)

Условие: $\dot{\phi}$ входит в уравнения только в *числителе*.

Результат

Функции g_i вблизи $u = 0$ должны вести себя как:

$$g_2 \sim O(1), \quad g_3 \sim O(\ln u), \quad g_4 \sim O(1), \quad g_5 \sim O(\ln u)$$

Важно

Логарифмические расходимости g_3 и g_5 входят в уравнения в виде произведений на $\dot{\phi}^m$ и дают **регулярный** вклад при $\dot{\phi} = 0$.

Наблюдательное ограничение: GW170817

Скорость гравитационных волн:

$$c_T^2 = \frac{G_4 - XG_{5\phi} - XG_{5X}\ddot{\phi}}{G_4 - 2XG_{4X} - X(G_{5X}\dot{\phi}H - G_{5\phi})}$$

Результаты анализа события GW170817

$$|c_T - 1| \lesssim 10^{-15}$$

Для «световых» теорий ($c_T \equiv 1$):

$$G_4(\phi, X) = G_4(\phi), \qquad G_5(\phi, X) = 0$$

Откуда

$$\mathcal{L} = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi + G_4(\phi)R.$$

Следствия для масштабно-инвариантных теорий

- **Случай** $[\phi] = 0$**:** $G_4 = Xg_4(\phi)$ и $G_5 = g_5(\phi)$
  Подстановка в выражение для c_T^2 даёт $c_T^2 \equiv -1$

Вывод

Масштабно-инвариантная теория с безразмерным ϕ *нежизнеспособна*.

- **Случай** $[\phi] = 1$**:** $G_4 = \phi^2 g_4(u)$, $G_5 = \phi^{-1} g_5(u)$

Важно

Условие $c_T = 1$ требует $G_{4X} = 0$ и $G_5 = 0$. Но это требование можно ослабить, если допустить $c_T \neq 1$ для более ранних эпох ($z_{\mathrm{GW170817}} \approx 0.01$).

Введение масштаба

Если допустить наличие размерного параметра M (например, M_{Pl}), то размерные соображения дают:

$$G_i(\phi, X) = M^{n_i}\, g_i\left(\frac{\phi}{M}, \frac{X}{M^4}\right), \qquad ([\phi] = 1)$$

1. **Явное нарушение:** добавление членов с размерными константами

Пример

$$G_4 = \frac{1}{2}M_{Pl}^2 + \xi\phi^2, \quad G_2 = X - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

2. **Динамическое возникновение масштаба:** масштаб M возникает как VEV $\langle\phi\rangle$.

Проблема иерархии масштабов

Наблюдаемые масштабы различаются на десятки порядков:

$$M_{Pl} \sim 10^{18}\ \text{ГэВ}, \quad \Lambda^{1/4} \sim 10^{-3}\ \text{эВ}, \quad m \sim 10^{-33} \div 10^{13}\ \text{ГэВ}$$

Проблема

В размерной теории нет причин для такой иерархии — это требует тонкой настройки параметров.

Возможное решение

Защита симметриями: приближённая шифт-симметрия $\partial\phi \to \partial\phi + c$ делает малую массу поля *технически естественной* по 'т Хоофту.

Выводы

- Масштабная инвариантность (размерный анализ) *существенно* ограничивают структуру $G_i(\phi, X)$.
- Случай **безразмерного** поля ($[\phi] = 0$) исключён ($c_T^2 \equiv -1$).
- Масштабно-инвариантная теория для **размерного** поля ($[\phi] = 1$) даёт ($u = \frac{X}{\phi^4}$)

$$G_2 = \phi^4 g_2(u),\ G_3 = \phi g_3(u),\ G_4 = \phi^2 g_4(u),\ G_5 = \phi^{-1} g_5(u).$$

При этом функции g_i вблизи $u = 0$ должны вести себя по крайней мере как:

$$g_2 \sim O(1), \quad g_3 \sim O(\ln u), \quad g_4 \sim O(1), \quad g_5 \sim O(\ln u)$$

Требование $c_T = 1$ даёт

$$G_4 \propto \phi^2, \quad G_5 = 0$$

Спасибо за внимание